Прикладные программы РЭШ

Олимпиада по математике, 2 апреля 2016 г.

Фамилия, имя, отчество

____

1. Интеграл $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x\,dx}{x^2+1}$ равен

A $\pi/3$

B $\frac{1}{4}\ln 2$

C $\frac{1}{2}\ln(5/2)$

D $\frac{1}{2}\ln(7/4)$

E $\pi/6$

Решение: Делая замену $t = x^2$, получаем

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\ln(t+1)\Big|_0^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{4}.$$

2. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x - x\sin x}{x}$ равен

A $1/2$

B $-1/2$

C 0

D $1/6$

E другому числу или не существует

Решение: Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - x\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x - x\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}(-x\cos x) = 0.$$

3. Функция $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ рассматривается на отрезке $[-2, 3]$. Найдите *ложное* утверждение.

A функция $f(x)$ неотрицательна на отрезке $[-2, 3]$

B в точке $x = 1$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[-2, 3]$

C наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-2, 3]$ меньше 10

D на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ убывает

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

Решение: Так как $f(3) = 24$, то C ложно. Производная $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ обращается в ноль в точках $x = -\frac{5}{3}$ и $x = 1$, отрицательна между этими точками и положительна вне этого отрезка, поэтому D верно. Поскольку $f(-2) = 9$ и $f(1) = 0$, то A и B верны.

4. Даны две компании. Вероятность дефолта первой из них равна 0.6, а вероятность дефолта второй компании при условии дефолта первой равна 0.5. При этом в случае отсутствия дефолта первой компании вторая может испытать дефолт с вероятностью 0.1. Тогда безусловная вероятность дефолта второй компании равна

A 0.1

B 0.3

C 0.34

D 0.6

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathit{default2}) &= \mathbf{P}(\mathit{default2}|\mathit{default1})\,\mathbf{P}(\mathit{default1}) + \mathbf{P}(\mathit{default2}|\neg\mathit{default1})\,\mathbf{P}(\neg\mathit{default1}) = \\ &= 0.5\times 0.6 + 0.1\times 0.4 = 0.34.\end{aligned}$$

5. Вы купили облигацию, которая может оказаться «хорошей» с вероятностью 0.8 или «плохой» с вероятностью 0.2. «Хорошая» облигация с вероятностью 0.9 через год выплатит 100, а с вероятностью 0.1 не выплатит ничего. «Плохая» облигация через год с вероятностью 1/2 выплатит 100, а с вероятностью 1/2 не выплатит ничего. Через год облигация выплатила 100. Тогда вероятность того, что это «хорошая» облигация, равна

A 0

B 0.8

C 80/92

D 72/82

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: По формуле Байеса

$$\mathbf{P}(\mathit{good\,bond}|\mathit{pays}\,100) = \frac{\mathbf{P}(\mathit{pays}\,100|\mathit{good\,bond})\,\mathbf{P}(\mathit{good\,bond})}{\mathbf{P}(\mathit{pays}\,100|\mathit{good\,bond})\,\mathbf{P}(\mathit{good\,bond}) + \mathbf{P}(\mathit{pays}\,100|\mathit{bad\,bond})\,\mathbf{P}(\mathit{bad\,bond})}.$$

Подставляя числа, получаем

$$\frac{0.9\times 0.8}{0.9\times 0.8 + 0.5\times 0.2} = \frac{72}{82}.$$

6. Квадратные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$ являются ортогональными. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Найдите *ложное* утверждение:

A матрица AB^T ортогональная

B матрица AA^T ортогональная

C матрица AB^T задает оператор проектирования

D матрица AA^T задает оператор проектирования

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

Решение: Так как A ортогональна, то $AA^T = I_n$ — единичная матрица порядка n, которая, разумеется, является ортогональной и задает оператор проектирования ($I_n I_n^T = I_n$ и $I_n^2 = I_n$). $AB^T(AB^T)^T = AB^TBA^T = AA^T = I_n$, поэтому матрица AB^T ортогональна. Но AB^T, вообще говоря, не задает оператор проектирования: например, при $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = I_n$ получаем $(AB^T)^2 = I_n \neq AB^T$.

7. Даны матрицы A размера $m \times n$ и B размера $k \times n$. Через x обозначим неизвестный столбец длины n. Пусть L_1 и L_2 — множества решений систем линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ соответственно. Тогда решением объединенной системы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является множество

A $\varnothing$

B $\{0\}$

C $L_1 \cap L_2$

D $L_1 \cup L_2$

E $L_1 + L_2$

Решение: x является решением объединенной системы тогда и только тогда, когда он обращает в нуль все компоненты вектора $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} Ax \\ Bx \end{pmatrix}$, то есть тогда и только тогда, когда x является решением обеих исходных систем: $x \in L_1 \cap L_2$.

8. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель любой квадратной матрицы X, а через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A $\det(A^{-1}) = \det A$

B $\det(-A) = -\det A$

C $\det(\alpha A) = \alpha \det A$

D $\det(A + B) = \det A + \det B$

E $\det(AA^T) = \det(A^2)$

Решение: По свойствам определителя $\det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = \det A \cdot \det A = \det(A^2)$. Для остальных случаев верные формулы выглядят как

$$\begin{aligned} &\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}, \\ &\det(-A) = (-1)^n \det A, \\ &\det(\alpha A) = \alpha^n \det A. \end{aligned}$$

Определитель суммы, вообще говоря, не выражается через определители слагаемых.

9. Наибольшее значение функции $f(x, y) = x + 2y$ на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$ равно

A $\sqrt{5}$

B $1/\sqrt{5}$

C $-1/\sqrt{2}$

D $\sqrt{2}$

E другому числу

Решение: Параметризуя уравнение связи с помощью замены $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, получаем

$$x + 2y = \cos t + 2 \sin t = \sqrt{5} \sin\left(t + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right),$$

откуда ясно, что наибольшее значение функции равно $\sqrt{5}$.

10. Функция $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ на множестве $\{(x,y,z)\colon z = xy\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

Решение: Подставляя выражение для z из ограничения, получаем для f выражение $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$. Это выражение может принимать сколь угодно большие значения: например, чтобы получить произвольное значение $M > 0$, можно взять $x = 0$, $y = \sqrt{M}$.

11. Интеграл $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\,dx$ равен

A π

B $-\pi$

C $\pi + 1$

D 2π

E $\pi/2$

Решение: По формуле интегрирования по частям

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

12. Симметричная матрица A порядка $n \geqslant 2$ такова, что $A^2 = 3A$. Тогда

A число 0 является собственным числом матрицы A

B число 3 является собственным числом матрицы A

C ни 0, ни 3 не являются собственными числами матрицы A

D числа 0 и 3 оба являются собственными числами матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Из условия следует, что $A(A - 3I_n) = 0$, то есть либо A, либо $(A - 3I_n)$ является вырожденной и, соответственно, либо 0, либо 3 является собственным числом матрицы A. Но возможно, например, что $A = 0$, и 3 не является собственным числом, или что $A = 3I_n$, и 0 не является собственным числом, поэтому все четыре утверждения ложны.

13. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$, где α — вещественный параметр. Множество значений α, для которых эта матрица положительно определена, есть

A $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$

B $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

C $(-2, 0) \cup (0, 2)$

D $(-2, 2)$

E $(-\infty, +\infty)$

Решение: Согласно критерию Сильвестра, для положительной определенности матрицы необходимо и достаточно, чтобы ее угловые миноры были положительны:

$$\begin{cases} 1+\alpha^2 > 0 \\ 4(1+\alpha^2) - 2\cdot 2 > 0 \\ 1\cdot 4(1+\alpha^2) - 1\cdot 2\cdot 2 - \alpha\cdot\alpha(1+\alpha^2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 > 0 \\ \alpha^2(3-\alpha^2) > 0 \end{cases} \iff 0 < |\alpha| < \sqrt{3}$$

14. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x}$ равен

A -1

B 1

C $1/2$

D 2

E другому числу или не существует

Решение: Применяя дважды правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\dfrac{1}{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{-\dfrac{1}{(1+x)^2}}=-1$$

15. Рассмотрим функции $f(x)=1-e^x+x$ и $g(x)=\sin(x)$. Тогда

A в некоторой окрестности точки 0 выполнено неравенство $f(x)<g(x)$

B в некоторой окрестности точки 0 выполнено неравенство $f(x)>g(x)$

C в некоторой окрестности точки 0 при $x>0$ выполнено неравенство $f(x)<g(x)$

D в некоторой окрестности точки 0 при $x<0$ выполнено неравенство $f(x)<g(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Производная разности функций в нуле

$$\big(f(x)-g(x)\big)'\Big|_{x=0}=1-e^x-\cos(x)\Big|_{x=0}=-1<0,$$

поэтому в некоторой окрестности нуля при $x>0$ выполнено $f(x)-g(x)<0$, а при $x<0$ выполнено $f(x)-g(x)>0$. Так что C истинно, а A, B и D — ложны.

16. Функция $f(x)=(x-5)^{\alpha}(12-x)^{1-\alpha}$

A определена и непрерывна на всей вещественной прямой при любом $\alpha>0$

B определена и непрерывна при $x>0$ и $\alpha>0$

C определена и непрерывна в интервале $(5,12)$ только при $\alpha<1$

D определена и непрерывна в интервале $(5,12)$ только при $\alpha\geqslant 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Поскольку, например, при $x=4$ и $\alpha=1/2$ функция $f(x)$ не определена, то A и B ложны. При $x\in(5,12)$ основания обеих степеней положительны и функция определена и непрерывна по x при любом α, поэтому C и D также ложны.

17. Функция $f(x)$ задана и ограничена на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда

A функция $f(x)$ достигает на $[a,b]$ наименьшего и наибольшего значения

B существуют $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-}f(x)$

C если $f(a)=f(b)$, то существует точка $c\in(a,b)$, такая что $f'(c)=0$.

D если $f'(x)=0$ при любом $x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ является константой на $[a,b]$.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: В условии ничего не сказано о непрерывности функции на всем отрезке $[a,b]$, а при невыполнении этого условия утверждения A–D, вообще говоря, не верны. В качестве контрпримеров можно взять соответственно функции

$$
\begin{aligned}
&f_{\mathrm{A}}(x)=\{x\} \quad \text{(дробная часть)} && \text{на отрезке } [0,1],\\
&f_{\mathrm{B}}(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & \text{при } x\neq 0\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases} && \text{на отрезке } [0,1],\\
&f_{\mathrm{C}}(x)=\{x\} \quad \text{(дробная часть)} && \text{на отрезке } [0,1],\\
&f_{\mathrm{D}}(x)=[x] \quad \text{(целая часть)} && \text{на отрезке } [0,1].
\end{aligned}
$$

18. Дана функция $f(x,y)=x^2+y^2$ и множество $M=\{(x,y)\colon 2\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1\}$. Найдите *ложное* утверждение.

A функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наибольшего и наименьшего значений

B каждый локальный минимум или максимум функции $f(x,y)$ на множестве M является точкой наименьшего или наибольшего значения функции $f(x,y)$ на множестве M

C функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наименьшего значения в четырех точках

D функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

Решение: Поскольку функция f и уравнение связи не меняются при изменении знака x и/или y на противоположный, то достаточно рассмотреть функцию в первом квадранте $\{(x,y)\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$. Параметризуем уравнение связи с помощью замены

$$\begin{cases} x=(1/4)\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases} \qquad t\in[0,\pi/2].$$

Исследуем производную функции $F(t)=f(x(t),y(t))=(1/16)\cos^8 t+\sin^8 t$ на интервале $(0,\pi/2)$:

$$F'(t)=-(1/2)\cos^7 t\sin t+8\sin^7 t\cos t=8\sin t\cos t\left(\sin^6 t-(1/16)\cos^6 t\right).$$

На рассматриваемом интервале производная обращается в 0 в одной точке:

$$\operatorname{tg}^6 t=1/16 \iff t=\operatorname{arctg}(1/\sqrt[3]{4}).$$

Поскольку на этом интервале синус возрастает, а косинус убывает (и так же их шестые степени), то в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс, так что это — точка локального минимума функции $F(t)$. Отсюда же следует, что 0 и $\pi/2$ — точки локального максимума $F(t)$ на отрезке $[0,\pi/2]$.
В силу отмеченной ранее симметрии получаем, что функция $f(x,y)$ на множестве M имеет 4 точки локального минимума (причем значения в них равны, так что в них достигается наименьшее значение) и 4 точки локального максимума: $f(\pm 1/4,0)=1/16$ и $f(0,\pm 1)=1$ (наибольшее значение функции, равное 1, достигается только в одной паре точек).

19. Дана функциональная последовательность $f_n(x) = n^x \ln n$. Обозначим через M множество тех чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и для каждого $x \in M$ обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тогда

A множество M замкнуто

B множество M открыто

C функция $f(x)$ является нечетной функцией

D функция $f(x)$ является неограниченной функцией на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \ln n = \begin{cases} +\infty & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Поэтому множество $M = (-\infty, 0)$, и оно, очевидно, открыто. Функция $f(x)$ не может быть нечетной уже потому, что она определена только для отрицательных чисел. Она ограниченна (равна 0) на M.

20. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 2016 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Решение: Вычислим определитель матрицы, составленной из 1-го, 2-го и 4-го столбцов исходной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2016 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2016 \cdot 8 \neq 0.$$

Следовательно, данные столбцы, равно как и строки исходной матрицы, линейно независимы, и ранг матрицы равен 3.

21. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ равен

A -2

B -1

C 1

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: Вычисляя определитель непосредственно, получаем, что он равен

$$2 \cdot 0 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 3 - 1 + 6 - 2 = 6$$

22. Квадратичная форма $f(x) = x^T A x$ в $\boldsymbol{R}^3$ задана матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

A   квадратичная форма $f(x)$ положительно определена

B   квадратичная форма $f(x)$ положительно полуопределена

C   квадратичная форма $f(x)$ отрицательно определена

D   квадратичная форма $f(x)$ знакопеременная

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Вычисляя угловые миноры матрицы, получаем:

$$\Delta_1 = 2 > 0,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0,$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = -15 < 0.$$

Поскольку знаки Δ_1 и Δ_3 различны, форма является знакопеременной.

23. Платежи X по акции подчиняются нормальному распределению с математическим ожиданием 5 и дисперсией 16. Независимая от акции облигация платит Y, равный 100 с вероятностью 0.9, и 0 с вероятностью 0.1. Тогда вероятность $\mathbf{P}\{XY > 500\}$ равна

A   0

B   0.05

C   0.45

D   0.55

E   числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

Решение: Так как нормальное распределение симметрично относительно своего математического ожидания, то $\mathbf{P}\{X > 5\} = 0.5$. По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{XY > 500\} = \mathbf{P}\{Y = 100\} \cdot \mathbf{P}\{XY > 500 \mid Y = 100\} + \mathbf{P}\{Y = 0\} \cdot \mathbf{P}\{XY > 500 \mid Y = 0\} =$$
$$= 0.9 \cdot \mathbf{P}\{X > 5\} + 0.1 \cdot 0 = 0.9 \cdot 0.5 = 0.45.$$

24. Цена акции в конце каждого года независимо от прошлого увеличивается на 10% с вероятностью 1/2 и уменьшается на 5% с вероятностью 1/2. Тогда вероятность того, что через 3 года цена акции будет выше, чем сегодня, равна

A   0

B   2/8

C   4/8

D   5/8

E   7/8

Решение: Если обозначить текущую цену акции x, то через 3 года в зависимости от того, сколько раз цена уменьшится, а сколько — увеличится, она может принять одно из четырех значений:

1) $1.1^3 x = 1.331x$,
2) $1.1^2 \cdot 0.95x = 1.1495x$,
3) $1.1 \cdot 0.95^2 x = 0.99275x$,
4) $0.95^3 x = 0.857375x$.

Итоговая цена будет выше сегодняшней в первых двух случаях, то есть если цена будет увеличиваться все 3 года или уменьшится в один из годов (не важно в каком именно) и увеличится в 2 других. Вероятность такого события равна

$$(1/2)^3 + 3 \cdot (1/2)^2 \cdot (1/2) = 4/8.$$

25. Про две случайные величины X и Y известно, что $X > Y$. Обозначим через $\mathbf{E}\, Z$, $\mathbf{Var}\, Z$ и $\mathbf{cov}(Z, W)$ соответственно математическое ожидание, дисперсию случайной величины Z и ковариацию случайных величин Z и W. Тогда

A $\mathbf{E}\, X > \mathbf{E}\, Y$, если и только если $\mathbf{cov}(X, Y) > 0$

B $\mathbf{E}\, X > \mathbf{E}\, Y$, если и только если $\mathbf{cov}(X, Y) \leqslant 0$

C $\mathbf{Var}\, X > \mathbf{Var}\, Y$

D $\mathbf{E}(X^2) > \mathbf{E}(Y^2)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

Решение: Рассмотрим случайную величину Z, принимающую значения 1 и 3 с вероятностями 1/2. Возьмем сначала $X = Z$, $Y = -2Z$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\, X = \mathbf{E}\, Z = 2 \quad &> \mathbf{E}\, Y = -2\,\mathbf{E}\, Z = -4, \\
\mathbf{Var}\, X = \mathbf{Var}\, Z = 1 &< \mathbf{Var}\, Y = 4\,\mathbf{Var}\, Z = 4, \\
\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Z^2) = 5 &< \mathbf{E}(Y^2) = 4\,\mathbf{E}(Z^2) = 20, \\
\mathbf{cov}(X, Y) &= -2\,\mathbf{Var}\, Z = -2 < 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, утверждения A, C и D ложны. Теперь возьмем $X = Z + 3$, $Y = Z$. Получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\, X = 5 &> \mathbf{E}\, Y = 2, \\
\mathbf{cov}(X, Y) &= \mathbf{Var}\, Z = 1 > 0.
\end{aligned}$$

Значит, утверждение B также ложно.